Μαθημα 25/Απει 4

30/5/2017

Ασκήσεις για Gauss και Stokes 170, 171, 172, 173

Άσκηση 174 (συνέχεια):

Επαλήθευση Gauss για $\bar{f}(x,y,z) = (2xy+z,\ y^2,\ -x-3y)$

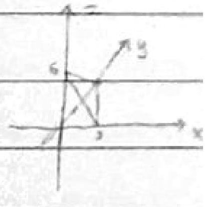
και $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ (x,y) \in K,\ 0 \le z \le \underbrace{6-2x-2y}\}$ προκύπτει από το ταβάνι $z = 6-2x-2y$

$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,3],\ 0 \le y \le \underbrace{3-x}\}$ προκύπτει από την ευθεία που δημιουργείται όταν το «ταβάνι» συναντά το πάτωμα $z=0$

$\Rightarrow \nabla \cdot \bar{f}(x,y,z) = 2y + 2y + 0 = 4y$

$\Rightarrow \int_V \nabla \cdot \bar{f}(x,y,z)\, d(x,y,z) = \int_K \left(\int_0^{6-2x-2y} 4y\, dz \right) d(x,y) =$

$= \int_0^3 \int_0^{3-x} \left(\int_0^{6-2x-2y} 4y\, dz \right) dy\, dx = \quad = 27$



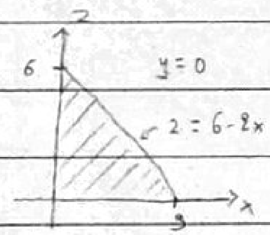
/Β' τρόπος!/

Από την άλλη $\int_{\partial V} \bar{f} \cdot \bar{n}\, d\sigma$, όπου $\bar{n}$ το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο

$\partial V = \text{πατ} + \text{μπρ} + \text{αρ} + \text{ταβ}$

πάτωμα, μπροστά, αριστερά (τοίχος), ταβάνι

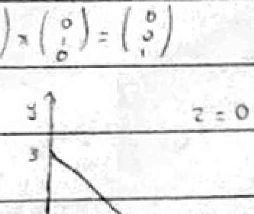
$I_{μπρ} = \int_{μπρ} \bar{f} \cdot \underbrace{\bar{n}_{μπρ}}_{(0,-1,0)}\, d\sigma = \int_{K_{μπρ}} \underbrace{\bar{f}(x,0,z)}_{=(z,0,-x)} \cdot (0,-1,0)\, d(x,z) = 0$



$\bar{\varphi}_{μπρ}(x,z) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \underbrace{\frac{\partial \bar{\varphi}_{μπρ}}{\partial x} \times \frac{\partial \bar{\varphi}_{μπρ}}{\partial z}}_{\bar{N}_{μπρ}(x,z)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow I_{μπρ} = \int_{K_{μπρ}} \bar{f}(\bar{\varphi}_{μπρ}(x,z)) \cdot \bar{N}_{μπρ}(x,z)\, d(x,z) = 0$

$I_{πατ} = \int_{πατ} \bar{f} \cdot \underbrace{\bar{n}_{πατ}}_{=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}\, d\sigma \qquad \bar{\varphi}_{πατ}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial \bar{\varphi}_{πατ}}{\partial x} \times \frac{\partial \bar{\varphi}_{πατ}}{\partial y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

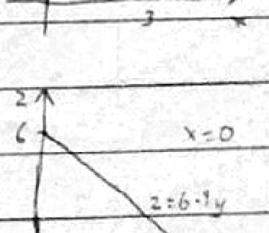


$I_{πατ} = \int_{K_{πατ}} \bar{f}(x,y,0) \cdot (0,0,-1)\, d(x,y) = \int_0^3 \int_0^{3-x} (x+3y)\, dy\, dx$

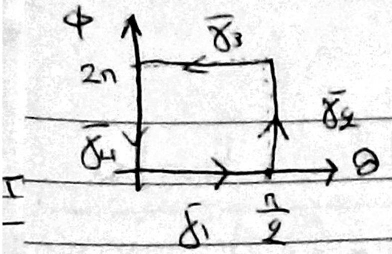
$I_{αρ} = \int_{αρ} \bar{f} \cdot \underbrace{\bar{n}_{αρ}}_{(-1,0,0)}\, d\sigma \qquad \bar{\varphi}_{αρ}(y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$K_{αρ} = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 3,\ 0 \le z \le 6-2y\}$

$\Rightarrow \frac{\partial \bar{\varphi}_{αρ}}{\partial y} \times \frac{\partial \bar{\varphi}_{αρ}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$



$\Rightarrow I_{αρ} = \int_{K_{αρ}} \underbrace{\bar{f}(0,y,z)}_{=(z,y^2,-3y)} \cdot (-1,0,0)\, d(y,z) = \int_0^3 \int_0^{6-2y} (-z)\, dz\, dy =$



$$\bar\gamma = \bar\gamma_1 \oplus \bar\gamma_2 \oplus \bar\gamma_3^- \oplus \bar\gamma_4^-$$

$$\bar\gamma_1(t) = (t,0) \quad t\in\left[0,\tfrac{\pi}{2}\right]$$

$$\bar\gamma_2(t) = \left(\tfrac{\pi}{2}, t\right) \ t\in[0,2\pi] \ , \quad \bar\gamma_3(t) = (t, 2\pi) \ t\in\left[0,\tfrac{\pi}{2}\right]$$

$$\bar\gamma_4(t) = (0,t) \quad t\in[0,2\pi]$$

$$I_2 = \int_{\bar\Phi\circ\bar\gamma} \bar f\cdot d(x,y,z) = \cancel{\int_{\bar\Phi\circ\bar\gamma_1} \bar f\cdot d(x,y,z)} + \int_{\bar\Phi\circ\bar\gamma_2}\dots - \cancel{\int_{\bar\Phi\circ\bar\gamma_3}\dots} - \cancel{\int_{\bar\Phi\circ\bar\gamma_4}\dots} \ (*)$$

αφού $(\bar\Phi\circ\bar\gamma^-)(t) = \bar\Phi(\underbrace{\bar\gamma^-(t)}_{=\bar\gamma(a+b-t)}) = (\bar\Phi\circ\bar\gamma)(a+b-t) = (\bar\Phi\circ\bar\gamma)^-(t)$

$$\boxed{\bar\Phi\circ\bar\gamma^- = (\bar\Phi\circ\bar\gamma)^-}$$

Επίσης έχουμε $(\bar\Phi\circ\bar\gamma_1)(t) = (\bar\Phi\circ\bar\gamma_3)(t)$

$(\bar\Phi\circ\bar\gamma_4)'(t) = 0$

$(\bar\Phi\circ\bar\gamma_4)(t) = (0,0,2)$

$$(*) = \int_{\bar\Phi\circ\bar\gamma_2} \bar f\cdot d(x,y,z) = \int_0^{2\pi} \bar f\left(\bar\Phi(\bar\gamma_2(t))\right)\cdot(\bar\Phi\circ\bar\gamma_2)'(t)\,dt =$$

$= (\bar\Phi\circ\bar\gamma)^-(t)$

$= 4\pi.$

Ομοιόμορφη σύγκλιση ακολουθιών συναρτήσεων
(βλ. και Rudin, Αρχές Μαθ. Ανάλ.)

Έστω $E\subset\mathbb{R}$ και $f_n: E\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$, $f: E\to\mathbb{R}$

Ορισμός: α) f_n συγκλίνει κατά σημείο στην f $:\Leftrightarrow$

$\forall x\in E: f_n(x)\to f(x)$ για $n\to\infty$

$\Leftrightarrow \forall x\in E \ \forall\varepsilon>0 \ \exists n_0 \ \forall n\geq n_0:$
$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

(συμβολισμός: $f_n\to f$ (κατά σημείο) (point wise))

β) f_n συγκλίνει ομοιόμορφα στην f (συμβολισμός

(uniformaly)
$f_n \to f$ ομοιομορφα $\left(\Leftrightarrow f_n \xrightarrow{u} f\right)$

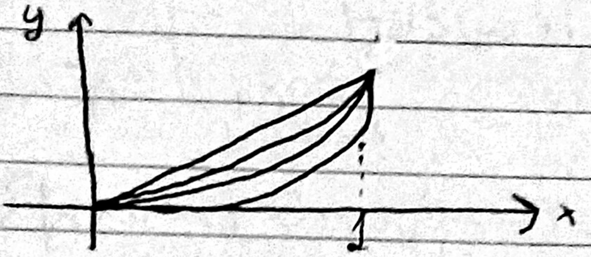
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n \geq n_0 \ \underbrace{\forall x \in E: |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon}$

$\Leftrightarrow \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

$\Leftrightarrow \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$

<u>παραδειγμα A</u>

$f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$



$x = 1: f_n(1) = 1 \to 1$

$x = 0: f_n(0) = 0 \to 0$

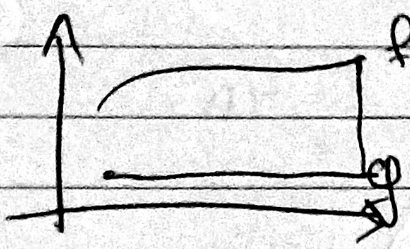
$x \in (0,1): f_n(x) \to 0$

$\Rightarrow f_n \to f$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

Ομως f_n δεν συγκλινει ομοιομορφα στην f, αφου $\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \|f_n - f\|_\infty$

[παρατηρηση: $\boxed{f_n \to f \text{ ομοιομορφα}} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0$

$\forall n \geq n_0 \ \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon \Leftrightarrow \boxed{\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n \to \infty]{} 0}$



$\|f - g\|_\infty = \sup_{x \in E} |f(x) - g(x)|$

στο παραδειγμα: $\|f_n - f\|_\infty \geq \sup_{x \in [0,1)} |f_n(x) - \underbrace{f(x)}_{=0}| =$

$= \sup_{x \in [0,1)} x^n = 1$

$\Rightarrow \|f_n - f\|_\infty \not\to 0$

παραδειγμα 2

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}} \quad , \forall x \in \mathbb{R}$$

$\forall x \in \mathbb{R} : f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0 = f(x)$ (κατα σημειο)

ομοιομορφα? $0 \le \|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|\sin(nx)|}{\sqrt{n}} \le \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$

$\Rightarrow \|f_n - f\|_\infty \to 0$

Ορισμος: Εστω $E \subset \mathbb{R}$, $f_n : E \to \mathbb{R}$, $f : E \to \mathbb{R}$

a) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$ κατα σημειο $:\Leftrightarrow \forall x \in E \ \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$

b) — " — ομοιομορφα $:\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} f_k \to f$ ομοιομ.

$\Leftrightarrow \left\|\sum_{k=1}^{n} f_k - f\right\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Η ομοιομορφη συγκλιση ειναι σημαντικη για τους εξης 3 λογους

Θεωρημα 1: $f_n, f : E \to \mathbb{R}$ (f_n συνεχη)

$f_n \to f$ ομοιομορφα $\Rightarrow f$ συνεχης

Θεωρημα 2: -"- $[a,b]$, f_n ολοκλ. -"-

-"- $\Rightarrow f$ ολοκλ. και

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

Θεωρημα 3: $f_n, f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f_n διαφορισιμες

$f_n \to f$ κατα σημειο, $f_n' \to g$ ομοιομ.

$\Rightarrow f_n \to f$ ομοιομ. και $f' = g$

$$\left[\Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{d}{dx} f_n(x) \right]$$

Προταση: $f_n \to f$ ομοιομορφα $\Rightarrow$ $f_n \to f$ κατα σημειο

($\not\Leftarrow$)

(βλ. παρ. 1)

αποδειξη:

Εχουμε $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n \ge n_0 \ \forall x \in E : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Εστω $x \in E$ και $\varepsilon > 0 \Rightarrow \forall n \geq n_0 : \| f_n(x_0) - f(x_0) \| < \varepsilon$

<u>Κριτηριο του Cauchy</u>: $f_n \to f$ ομοιομορφα $\Leftrightarrow$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n, m \geq n_0 : \| f_n - f_m \|_\infty < \varepsilon$

<u>αποδειξη</u>:

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n, m \geq n_0 : \| f_n - f \|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}, \ \| f_m - f \|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \| f_n - f_m \|_\infty \underset{(*)}{\leq} \| f_n - f \|_\infty + \| f - f_m \|_\infty < \varepsilon$

$(*)$ $\forall x \in E : | f_n(x) - f_m(x) | \leq \underbrace{| f_n(x) - f(x) |}_{\leq \| f_n - f \|_\infty} + \underbrace{| f(x) - f_m(x) |}_{\leq \| f_m - f \|_\infty}$

$\Rightarrow \| f_n - f_m \|_\infty \leq \| f_n - f \|_\infty + \| f - f_m \|_\infty$

$(\Leftarrow)$ Εστω $x_0 \in E$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n, m \geq n_0$
$| f_n(x_0) - f_m(x_0) | < \varepsilon \Leftrightarrow (f_n(x_0)) \subset \mathbb{R}$ ακολ. Cauchy

$\Rightarrow \exists f(x_0) = \lim_{n \to \infty} f_n(x_0)$

$\Rightarrow \exists f : E \to \mathbb{R}$ με $f_n \to f$ κατα σημεια

Εστω $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n, m \geq n_0 \ | f_n(x_0) - f_m(x_0) | < \varepsilon$
$\Leftrightarrow (f_n(x_0)) \subset \mathbb{R}$ ακολ. Cauchy
$\Rightarrow \exists f(x_0) = \lim_{n \to \infty} f_n(x_0)$

$\forall x \in E \ \forall n \geq n_0 : | f_n(x) - f_m(x) | < \varepsilon \xrightarrow[\forall m \geq n_0]{n \to \infty} | f_n(x) - f(x) | \leq \varepsilon$

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 1-3 χρησιμοποιούμε το κριτήρ. Cauchy και το Βασικό Θεώρημα:

$f_n \to f$ ομοιόμορφα, x σημ. συσσ. του E

και $\forall n$ $f_n(t) \xrightarrow[t \to x]{} f_n(x) \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow f(t) \xrightarrow[t \to x]{} f(x) \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(x)$$

$$\left[\lim_{n \to \infty} \lim_{t \to x} f_n(t) = \lim_{t \to x} \lim_{n \to \infty} f_n(t) \right]$$

Πόρισμα = Θεώρημα 1:

$f_n \to f$ ομ., f_n συνεχή

$\Rightarrow f$ συνεχής